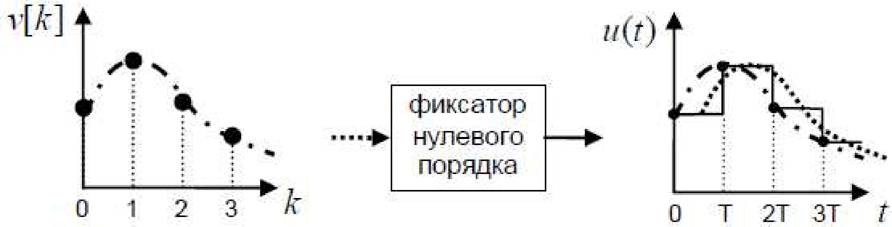
ЛЕКЦИЯ 13

4.4 Динамические свойства экстраполятора (фиксатора) нулевого порядка

Когда мы рассматривали структуру цифровой системы управления (см. Лекцию 3), то выяснили, что на выходе цифрового управляющего устройства управления всегда используется "фиксатор" или экстраполятор, обычно это экстраполятор нулевого порядка. Он удерживает сигнал управления, вычисленный в начале такта управления, в течение всего такта. В итоге на выходе ЦАП будет аналоговый сигнал *u(t)*, но изменяться он будет ступенчато. Экстраполятор, как мы увидим, задерживает свой входной сигнал на половину такта и поэтому является динамическим элементом. Эта динамика дополняется к объекту и должна учитываться при расчете цифровой системы управления.



Рассмотрим динамические свойства экстраполятора нулевого порядка. Проще всего найти его импульсную характеристику, затем, через нее – передаточную функцию. Напомним: импульсная характеристика – это функция времени, являющаяся реакцией системы на входной сигнал в виде дельта-функции. Мы знаем, что при подаче на вход экстраполятора цифрового кода на его выходе появляется аналоговый сигнал длительностью, равной периоду дискретизации. Для сохранения передаточных свойств экстраполятора амплитуда аналогового сигнала должна соответствовать дельта-функции. В дельта-функции нормируется площадь, она равна единице. Тогда естественно считать площадь аналогового сигнала за период равной площади дельта-функции, то есть единице. Площадь аналогового сигнала равна $S = A \cdot T = 1$, откуда амплитуда $A = 1/T$. Следовательно, если представить входной сигнал экстраполятора в виде дельта-функции, то его импульсная характеристика будет являться прямоугольным импульсом амплитудой $1/T$. Это показано на рисунке 4.2.

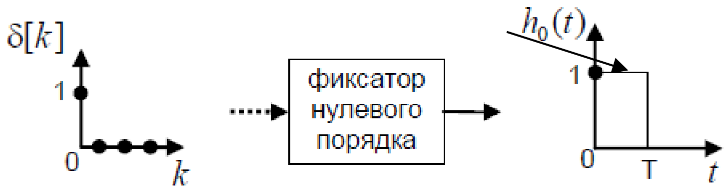


Рисунок 4.2 – Импульсная характеристика экстраполятора (фиксатора) нулевого порядка (амплитуда импульсной характеристики должна быть $1/T$)

Рассмотренная импульсная характеристика записывается в виде

$$w_э(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}, & 0 \le t \le T \\ 0, & t \succ T \end{cases} \tag{4.10}$$

Передаточная функция есть преобразование Лапласа от импульсной характеристики. Тогда, используя (4.10), получаем искомую передаточную функцию

$$W_э(s)=\int_0^\infty w_э(t)\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{T}\int_0^T e^{-st}dt=-\frac{1}{Ts}e^{-st}\Big|_{t=0}^{T}=-\frac{1}{Ts}\left(e^{-sT}-1\right)=\frac{1-e^{-sT}}{Ts}. \qquad (4.11)$$

На низких частотах, разлагая экспоненту в степенной ряд и удерживая два первых слагаемых, получаем

$$W(s)\approx\frac{1-\dfrac{1}{1+sT}}{sT}=\frac{\dfrac{1+sT-1}{1+sT}}{sT}=\frac{\dfrac{sT}{1+sT}}{sT}=\frac{1}{1+sT}. \qquad (4.12)$$

Как видно, *фиксатор, как динамический элемент, на низких частотах ведет себя, как инерционное звено с единичным коэффициентом передачи и постоянной времени Т.* Эту инерционность следует учитывать при расчете цифровых систем управления.

Вычисляя частотную характеристику (4.11), можно убедиться в том, что фиксатор задерживает свой входной сигнал на половину такта квантования, то есть на $T/2$. Итак: *фиксатор задерживает свой входной сигнал на половину такта квантования, то есть на* $T/2$.

Мы получили непрерывную передаточную функцию экстраполятора нулевого порядка. Она используется, когда расчет ведется непрерывными методами теории управления. Но, когда требуется расчет дискретными методами, нужна дискретная передаточная функция экстраполятора. Рассмотрим этот вопрос. Обычно считают, что экстраполятор является неотъемлемой частью объекта управления. Поэтому представим себе систему, состоящую из непрерывного объекта с передаточной функцией $W_o(s)$, на входе которого стоит экстраполятор нулевого порядка. Непрерывная передаточная функция последовательно включенных экстраполятора и объекта имеет вид

$$W_{oэ}(s)=\frac{1-e^{-sT}}{Ts}\cdot W_o(s). \qquad (4.13)$$

Выполняя z-преобразование (4.13), и учитывая, что, по определению $Z\left\{e^{-sT}\right\}=z^{-1}$, получаем удобное для использования выражение

$$Z\{W_{oэ}(s)\}=Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{Ts}\cdot W_o(s)\right\}=Z\left\{\left(1-e^{-sT}\right)\cdot\frac{W_o(s)}{Ts}\right\}=Z\left\{\frac{W_o(s)}{Ts}-e^{-sT}\cdot\frac{W_o(s)}{Ts}\right\}=$$
$$=Z\left\{\frac{W_o(s)}{Ts}\right\}-Z\left\{e^{-sT}\cdot\frac{W_o(s)}{Ts}\right\}=Z\left\{\frac{W_o(s)}{Ts}\right\}-z^{-1}Z\left\{\cdot\frac{W_o(s)}{Ts}\right\}=$$
$$=\left(1-z^{-1}\right)Z\left\{\frac{W_o(s)}{Ts}\right\}=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{W_o(s)}{Ts}\right\}.$$

(4.14)

Как видно, интегратор отнесен к непрерывному объекту управления.

4.5 Исследование устойчивости цифровых систем управления

Мы уже рассматривали устойчивость цифровых систем управления. Выяснили, что дискретная система устойчива тогда, когда все полюсы ее дискретной передаточной функции находятся на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса. Однако, как и для непрерывных систем, непосредственное вычисление корней характеристического уравнения представляет собой громоздкую операцию. Поэтому важно иметь критерии устойчивости, позволяющие установить факт устойчивости многочлена без вычисления его корней. Удобнее всего для исследования устойчивости цифровых систем управления применять хорошо разработанные критерии устойчивости непрерывных систем. Для этого нужно перейти от дискретной системы к непрерывной и затем выявить устойчивость непрерывной системы. Если непрерывная система устойчива, то устойчива и соответствующая ей дискретная система. Конечно, при переходе нужно использовать метод, сохраняющий свойство устойчивости. Для этого годится применение билинейного преобразования (3.74)

$$z = \frac{2 + sT}{2 - sT}\,. \tag{3.74}$$

Преобразованная передаточная функция уже будет аналоговой. Для нее можно использовать критерии устойчивости непрерывных систем, например, Рауса, Гурвица, Михайлова, Найквиста, (Руднев, с. 45).

Таким образом, *порядок исследования ЦСУ на устойчивость методами непрерывных систем:*

1) используя билинейное преобразование, переводим передаточную функцию ЦСУ из дискретной в непрерывную форму;

2) методами непрерывных систем выявляем устойчивость непрерывной системы. Если она устойчива, делаем вывод о устойчивости дискретной системы.

Без преобразований устойчивость дискретных систем можно исследовать алгебраическим критерием Шура-Кона. Недостаток – необходимость вычислять определители высокого порядка. Для исследования устойчивости дискретных систем разработаны также аналоги частотных методов (Михайлова, Найквиста, ЛАЧХ), но они находят ограниченное применение.

4.6 Обобщенный линейный регулятор. Методы параметрического синтеза

Продолжаем рассмотрение задач синтеза. Наиболее общая форма передаточной функции линейного дискретного регулятора может быть представлена в виде

$$W_p(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m}}{1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots + h_n z^{-n}}\ , \tag{4.15}$$

где q_i, h_i – коэффициенты. Соотношение между n и m может быть различным.

Регулятор (4.15) *называется обобщенным линейным регулятором порядка p, где p – наибольшее из n* или *m.*

Порядок регулятора обычно выбирают так, чтобы при минимальном порядке регулятор обеспечивал заданное качество регулирования. При определении порядка часто используя метод проб и ошибок. Будем считать, что порядок определен. Если порядок определен, то остается задача определения коэффициентов q_i, h_i, то есть собственно задача параметрического синтеза.

Напомним, задача параметрического синтеза ставится следующим образом. Задана структура регулятора. Требуется определить свободные параметры этого регулятора, обеспечивающие заданное качество регулирования.

Распространенные методы синтеза таких алгоритмов – это метод логарифмических частотных характеристик (метод ЛАЧХ), метод корневого годографа, метод расширенных частотных характеристик, метод параметрической оптимизации и другие. Эти методы используются для непрерывных систем, аналоги этих методов в некоторой степени разработаны и для цифровых дискретных систем. Коротко рассмотрим идеи этих методов.

Метод ЛАЧХ заключается в построении ЛАЧХ неизменяемой части разомкнутой системы управления, определении желаемой ЛАЧХ, определении путем сопоставления желаемой и исходной ЛАЧХ параметров корректирующего устройства, оно же является регулятором. При определении ЛАЧХ неизменяемой части разомкнутой системы в качестве критериев используются запас по фазе, запас по амплитуде, частота среза, полоса пропускания, показатель колебательности и некоторые другие.

Метод корневого годографа предусматривает поиск траекторий корней числителя и знаменателя передаточной функции замкнутой системы при изменении отдельных параметров, например, коэффициента передачи разомкнутой системы. Эти траектории называются корневыми годографами. Построив траектории всех корней, можно выбрать такие значения параметров, которые обеспечивают наилучшие траектории и расположение корней.

Метод расширенных частотных характеристик вы подробно изучали и его мы не будем рассматривать. Напомним лишь, что в этом методе используется комбинированный критерий: параметры регулятора должны обеспечивать минимум интегрального квадратичного критерия при заданной степени колебательности системы. (Дудников, с. 26).

Метод параметрической оптимизации заключается в поиске таких параметров регулятора, при которых достигается минимум интегрального квадратичного критерия качества управления. Наиболее распространен критерий вида

$$J = \int_0^{t_1} (\varepsilon^2(t) + r\Delta u^2(t))dt\,, \tag{4.16}$$

где $\varepsilon(t)$ – рассогласование выходной переменной объекта управления от своего задания; $\Delta u(t)$ – изменение управляющего воздействия от своего установившегося значения; r – весовой коэффициент.

Для дискретных цифровых систем интеграл заменяется суммой, и этот критерий принимает вид

$$J = \sum_{k=0}^{l} (\varepsilon^2(k) + r\Delta u^2(k))\,. \tag{4.17}$$

Помимо аналитических методов синтеза, данный метод часто используется на математической модели замкнутой системы управления, сформированной на ЭВМ. Здесь производится прямой поиск таких настроечных параметров регулятора, которые обеспечивают минимум интегрального критерия. Один из вариантов – вычисление критерия (4.16) или (4.17) производится по переходной функции замкнутой системы регулирования, интегрирование или суммирование производится в пределах от 0 до t_1, где t_1 – время полного выхода регулируемой переменной на установившийся режим.

Поиск производится методами нелинейного программирования. Задача поиска ставится следующим образом. Каждому набору настроечных параметров регулятора $\vec{P}$ соответствует определенное значение функционала (4.16). Тогда этот функционал можно рассматривать, как функцию от настроечных параметров регулятора ($\vec{P}$ – вектор параметров)

$$J = f(\vec{P}),\tag{4.18}$$

и искать минимум этой функции по $\vec{P}$ поисковыми методами, например, методами нелинейного программирования. При этом можно использовать простейший метод Гаусса-Зейделя, более сложный наискорейшего спуска или другой подходящий для данных условий метод (Изерман, с. 84, 95).

Вернемся к общей форме линейного дискретного регулятора (4.15). Обычно от регулятора требуется, чтобы он обеспечивал нулевую статическую ошибку регулирования. Для этого нужно, чтобы регулятор содержал интегральную составляющую. Мы знаем, что интегральной составляющей соответствует единичный полюс $z = 1$. Тогда (4.15) можно записать так

$$W_p(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots + h_n z^{-(n-1)}\right)}\ ,\tag{4.19}$$

Передаточная функции простейшего линейного дискретного регулятора второго порядка с интегральной составляющей имеет вид

$$W_p(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{\left(1 - z^{-1}\right)}\ , \text{ или } \ u(z)\left(1 - z^{-1}\right) = \left(q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}\right)e(z)\,,$$

$$\text{или } u(z) - u(z)z^{-1} = q_0 e(z) + q_1 z^{-1} e(z) + q_2 z^{-2} e(z)\tag{4.20}$$

Передаточной функции (4.20) соответствует разностное уравнение

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)\ .\tag{4.21}$$

Как мы увидим далее, это уравнение соответствует одной из форм дискретного ПИД-регулятора. ПИ-регулятору соответствует разностное уравнение 1-го порядка.